

Analiza matematyczna I

Zestaw II

Zadanie 1. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = x \cdot |x^2 - 4x|$$

jest różniczkowalna w swojej dziedzinie? Ile wynosi pochodna tej funkcji w punkcie $x = 0$?

Zadanie 2. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$?

Zadanie 3. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 3 \\ 6x - 9 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

jest różniczkowalna? Czy funkcja f jest ciągła?

Zadanie 4. Policz pochodną

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\left(\sin \frac{1}{x}\right)'$ | 2) $(\cos^{2022}(x))'$ | 3) $(\sqrt{x^2 + x})'$ |
| 4) $[\ln(\ln(\ln x))]'$ | 5) $(e^{\cos x})'$ | 6) $(x \cdot \arctan(\sqrt{x}))'$ |

Zadanie 5. Policzyc granicę

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 2x + 4}{\cos x + 4x + 7}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 3x}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{2x} - e^4}{\ln(2x - 3)}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{\pi} \arctan x \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

7)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x}$$

8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x}$$

9)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \arctan(2x) - \pi x)$$

Zadanie 6. Zbadac przebieg zmienności i naszkicowac wykres funkcji f danej wzorem

1)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$$

2)

$$f(x) = |x| \cdot e^{-x^2}$$

3)

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

4)

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Zadanie 7. Wyznaczc wartosc najmniejszą i największą funkcji f danej wzorem

$$f(x) = x \cdot |x^2 - 3x|, \quad \text{dla } x \in [0, 5].$$

Zadanie 8. Korzystajac z twierdzenia Lagrange'a wykazac, ze

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1,$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Zadanie 9. Obliczyc pochodne rzędu drugiego funkcji f zadanej wzorem

1) $f(x) = \sin^2(2x + 7)$

2) $f(x) = \ln(x^2 + 8)$

3) $f(x) = e^{xe^5}$

4) $f(x) = x^{2023}$

Zadanie 10. Niech $f(x) = \ln(x + 1)$ dla $|x| < 1$. Rozwinac funkcję f w szereg Maclaurina.

Zadanie 11. Niech $f(x) = \sqrt{x+1}$. Znalezc 3 pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji f w szereg Taylora w punkcie $x = 0$. Podac przyblizona wartosc $\sqrt{1,02}$ i oszacowac blad przyblizenia.

"I'll change him."

